SÉRIE DE RÉVISION N°2.

EXERCICE N°1 :

Soit $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace et les points A(0,-1,1) ; B(1,1,5) et C(1,0,4).
1/ a- Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
b- Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) noté P.
c- Donner une représentation paramétrique de la droite Δ passant par B et $\perp$ au plan P.
2/ Soit m $\in$ IR, on considère les plans : $P_m : (2m - 1)x + (m - 2)y + mz + 2m - 3 = 0$.
a- Montrer que tous les plans P_m contiennent une droite fixe dont on donnera un point et un vecteur directeur.
b- Déterminer le réel m pour que P soit perpendiculaire à P_m .
3/ <u>On prend m = 1</u>, a- déterminer d(O,P) et d(O,P_1)
b- Soit $D = P \cap P_1$, calculer d(O,D).

EXERCICE N°2 :

Soit $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace et les points A(1,-2,2) et B(1,0,1) et soit
L'ensemble $S = \{M(x, y, z) \in \xi / x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4z = 0\}$
1/ Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon R.
2/ Soit P le plan passant par E(1, 1, -1) et perpendiculaire à la droite (AB).
a- Déterminer une équation cartésienne du plan P.
b- Montrer que le plan P est tangent à la sphère S et préciser les coordonnés du point de contact H de P et S.
3/ Soit Q le plan tangent à S en B.
a- Montrer qu'une équation cartésienne de Q est : $-2x + z + 1 = 0$.
b- Montrer que le plan P et Q sont sécants et donner une représentation paramétrique de la droite $\Delta = P \cap Q$.
c- Montrer que $\Delta \cap S = \varnothing$.
d- Déterminer l'équation P' du plan médiateur du segment [BH] et vérifier que $\Delta \subset P'$.
4/ Soit $Q_m : -2x + z + m = 0$, oũ m est un paramètre réel.
a- Déterminer suivant les valeurs de m : $S \cap Q_m$.
b- Montrer que Q_0 coupe la sphère suivant un cercle ζ qu'on déterminera son rayon et son centre H'.

EXERCICE N°3 :

Soit $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace et les points A(1,0,1) ; B(1,1,1) et C(0,0,1).
1/ a- Montrer que : O, A, B et C ne sont pas coplanaires.
b- Calculer le volume v et la hauteur h du tétraèdre OABC.
2/ a- Déterminer un vecteur ,normal du plan (ABC).
b- Calculer l'aire du triangle ABC ; en déduire d(A , (BC)).
3/ Soit S la sphère de centre A et passant par B et $P : x - y + z - 1 = 0$.
a- Calculer le rayon R de la sphère.
b- Montrer que S et P sont sécants suivant un cercle ζ dont on précisera les coordonnées du centre H et le rayon r.
c- Déterminer une équation cartésienne du plan Q tangent à S en B.
d- Etudier la position relative de P et Q puis déterminer $P \cap Q$.

EXERCICE N°4 :

Soit $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace et les points A(3, 2, 4) ; B(0, 3, 5) C(0, 2, 1) et D(3, 1, 0).

1/ a- Déterminer les composantes du vecteurs : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$.

b- Montrer que ABCD est un parallélogramme et calculer son aire.

2/ Soit S la sphère de centre I(2, -2, 5) et de rayon $3\sqrt{2}$ et P le plan passant par les points A, B et D.

a- Vérifier que : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD})$.

b- Montrer que le plan P est tangent à la sphère S au point A.

EXERCICE N°5 :

Soit $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace et les points A(1, -4, 0) ; B(4, -1, 3) C(4, -4, -3) et D(-2, 2, -3).

1/ a-Calculer : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

b- Déterminer les composantes du vecteurs $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

2/ Calculer l'aire du triangle ABC.

3/ Montrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).

4/ a- Vérifier que le volume du tétraèdre ABCD est égal à 27.

b- Calculer l'aire du triangle BCD.

c- En déduire la distance du point A au plan (BCD).

EXERCICE N°6 :

Soit $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace et points A(3, 2, 6) ; B(1, 2, 4) et C(4, -2, 5) .

1/ a- Déterminer les composantes du vecteurs $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

b- En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

c- Calculer le volume du tétraèdre OABC.

2/ Soit H la projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC). Montrer que : OH = 4/3

3/ Soit S la sphère de centre O et passant par A.

a- Justifier que l'intersection de S avec la plan (ABC) est un cercle de centre H.

b- Calculer le rayon du cercle ζ .

EXERCICE N°7 :

Soit $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace. On considère la droite Δ passant par le point A(-3, -1, -3) et de vecteur directeur : $\vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ et la droite D passant par le point B(3, 2, 3) et de vecteur directeur : $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

1/ a- Calculer $\vec{u}.\vec{v}$ et $\det(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB})$.

b- Justifier que les droites Δ et D sont orthogonales et non coplanaires.

c- Déterminer une équation cartésienne du plan contenant Δ et parallèle à D.

2/ Soit S al sphère de centre C(-1, 0, -1) et de rayon 6 et P le plan d'équation : $2x + y + 2z + 13 = 0$.

a- Montrer que S et P se coupent suivant un cercle de centre A. Déterminer le rayon de ce cercle.

b- Montrer que la droite D est tangente à la sphère S au point B.

3/ a- Calculer AB, en déduire que le point C appartient au segment [AB].

b- Déterminer alors une droite perpendiculaire aux droites D et Δ .

EXERCICE N°8 :

Soit $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace et ABCDEFGH est un parallélépipède tel que $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i}$; $\overrightarrow{AD} = 4\vec{j}$ et $\overrightarrow{AE} = 3\vec{k}$

1/ a- Vérifier que : $\overrightarrow{AG} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$

b- Déterminer les composantes de chacun des vecteurs : $\overrightarrow{EB}$; $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{EB} \wedge \overrightarrow{EG}$

c- Déterminer une équation cartésienne du plan (EBG).

2/ Soit α un réel différent de 1 et M de coordonnées $(2\alpha, 4\alpha, 3\alpha)$.

a- Vérifier que M décrit la droite (AG) privée du point G.

b- Montrer que M n'appartient pas au plan (EBG).

3/ Soit v le volume du tétraèdre MEBG.

a- Exprimer v en fonction de α .

b- Calculer le volume du tétraèdre AEBG.

c- Pour quelles valeurs de α , v est-il égal au volume du parallélépipède ABCDEFGH ?